

Studiul bazelor matematice ale informaticii (I)

(The study of the mathematical bases of computer science)

DRAGOȘ VAIDA

Facultatea de Matematică și Informatică, Universitatea București

The evolution of programming languages and of software engineering displays a variety of even more developed abstraction/formal mechanisms. In the context, the article provides reasons for an increasing interest for Mathematics in teaching and research in Computer Science (CS). The paper deals with the following topics: Applications vs. Fundamentals in CS; How CS provides contacts with chapters of Today Mathematics; The mathematical fundamentals of CS: some references of the Romanian studies - Formal languages, grammars and automata; Ordering and algebraic structures, lattices, multilattices; Bibliography (39 entries).

Keywords: Programming languages, Software engineering, Mathematics, Computer science

Aplicații versus fundamente

De mulți ani, inclusiv din timpul regimului pomenit ca „epoca de aur”, cercetarea și învățământul sunt supuse unor presiuni în direcția „aplicațiilor”. În Occident, aceste cerințe s-au înmulțit după mișcările studențești din mai 1968. În partea noastră din Europa, exigențele relative la valoarea practică conveneau minunat regimurilor care nu gustau niciodată intelectualitatea, manifestându-și inapetența la teorie / abstracțiune / concept. Autoritățile vedeau în insistența pentru aplicații o șansă mai bună de a evita discuții greu de înțeles, de a controla mediul academic și de a-l înfricoșa de câte ori era nevoie. După 1989, prin sistemul universităților particulare, încuviințat de la Universitatea București (care ar fi trebuit să-și manifeste exigențele), au apărut cariere înjghebate de te miri cine și cum. Necesitățile categoric legitime privind valențele practice, în loc să fie satisfăcute prin reforme de substanță, ce-i drept dificile și de durată, s-au văzut înecate într-un fel de poporanism. Acum, ceea ce trebuie să se ceară ar fi o reșezare / echilibrare nespectaculoasă, fără demagogie, bazată pe concepte și idei, pe o regândire, în toată modestia spiritului, a conviețuirii bazelor / fundamentelor teoretice cu aplicațiile. Firește, nu este vorba de a refasona domeniile / disciplinele după cum ne place, ci (i) de a respecta modul natural în care acestea au apărut și s-au afirmat și (ii) de a reflecta cu seriozitate, în prezentările respective, preocupările

reale și rezultatele cercetării științifice actuale din diferitele domenii.

Informatica ne pune în contact cu capitolele ale matematicii de azi

Nu este bine să înghesuim părțile fundamentale, să le reducem la ceea ce ni se pare a fi strictul necesar și astfel să ne simplificăm existența, adoptând o conduită care, din când în când, să placă și să culeagă beneficiile obișnuite ale populismului. Un corp de cunoștințe este ceva viu, venind din contribuția prin lucrări a diferitelor spirite active în domeniu, pentru care clasificările noastre ulterioare, școlarești, nu au o importanță reală. În plus, prin raportarea la baze, afirmațiile câștigă în generalitate, nu mai sunt doar cazuri particulare izolate și, în locul unor tehnici de lucru dispartate, ajungem la *discipline* coerente, mai ușor de înțeles, de explicat și mai ales cu un mecanism de *autodezvoltare* încorporat.

Informatica este un caz tipic. Din cauza deschiderii benefice a domeniului către nevoile sociale/economice există primejdia reducionismului, a limitării întregului domeniu doar la tehnicile de calcul, fără îndoială interesante, fascinante și de mare utilitate. Inundați de acestea, să nu pierdem, însă, statutul științific denumit *computer science*.

Calculul, metodele și algoritmii de prelucrare sunt în legătură strânsă cu aplicațiile. În același timp, sunt însă și expresii ale unor procese ale spiritului, de mare complexitate și generalitate, prin natura lor

independente de contextul concret în care au apărut și de reprezentarea concretă a informației. Un program și deci calculul poate fi tot atât de complex și de general cât o demonstrație matematică nebanală. Aceste forme generale și structuri de fond nu trebuie să dispară în noianul exemplificărilor răzlețe. Informatica ne conduce, inevitabil și natural, la întâlnirea cu capitole ale matematicii de azi, unele constituite și studiate ceva mai demult, dar ale căror aplicații au fost descoperite abia în ultimii ani, sau cu altele sugerate direct de informatică, aflate, în prezent, în curs de cristalizare. Avem cel puțin două zone de interferență matematică – informatică, dezvoltate cu asiduitate, strâns legate de algebră pentru care vezi [1,10,13,14,17,25-27,39]: (a) *fundamentele matematice ale informaticii*, în care se cercetează *matematizarea/formalizarea* unor capitole ale informaticii, cât și *bazele teoretice* ale informaticii, precum teoria limbajelor formale, vezi [17,19,27,33] și semanticii, teoria calculabilității (Post, Church din 1930, Turing, Kleene), teoria automatelor, a complexității, apărută în deceniul 1960-1970, teoria tipurilor de date, logica matematică, vezi [17,25-27,29] sau teoria programării [11,12,15,17,27,34,36]; (b) *structuri matematice* găsite în matematică și ulterior aplicate în informatică, exemple semiinelele, vezi [15,16], [24,37] sau structurile de ordine, precum laticelul [2,10,13,28,30] multilaticelul, vezi [3-7,21-23,32] sau sistemele algebrice parțial ordonate, vezi [4,8-10], [20-22,35]. Trebuie să admitem că aceste domenii/subdomenii nu au intersecții vide, că legăturile și istoricul dezvoltării nu sunt ușor determinate, vezi [18] sau [38] și că intervine un grad de arbitrar, în funcție de referințele luate ca surse. Date fiind limitările naturale, inclusiv cele rezultând din propria formare, ne limităm la câteva *exemple cu trimiteri la teoria semiinelelor, teoria mulțimilor parțial ordonate, a laticelului, și a structurilor algebrice parțial ordonate.*

În 1948-1950 se conturează necesitatea unei teorii a automatelor sugerată de calculatoarele care apăreau și ulterior de legăturile acestora cu limbajele formale. În acest context, John von Neumann (1903-1957) a venit cu *ideea programului memorat* în același spațiu ca și datele [11], [36] și a prezentat-o la Cambridge în 1935, fiind reflectată (enshrined) în concepția mașinii Turing, din 1936. Avem, deci, de operat cu diferite *tipuri de date*, unele provenind din *input*, altele de tip *instrucțiuni/comenzi* și, mai departe, altele de tip *cuvinte* peste un alfabet, deci *șiruri* de caractere/simboluri. Tipul de date pentru *output*/ rezultate este definit de utilizator. Pasul realizat după John von Neumann a fost de natură matematică. Aveam de considerat mulțimi de *date*,

care însă nu ne apăreau ca mulțimi amorfe, ci ca *structuri* echipate cu *operații* convenabil definite și cu *relații*, în funcție de aplicație. Mai mult decât atât, credem că *teoria abstractă a datelor* ca și *aritmetizarea demonstrațiilor* introdusă de K. Gödel (1906-1978) se găsesc în embrion în ideea programului memorat și interpretat/compilat/generat, înainte sau în cursul execuției. Concepția lui von Neumann privind organizarea unui calculator, rămasă în vigoare până azi, apare în memoriul *First draft on EDVAC*, din 30 iunie 1945 (Klara von Neumann, September 1957, Cuvânt înainte la *The computer and the brain* (1958)). După 10 ani apărea și proiectul primului calculator de la noi, *acum 60 de ani* [27], [38].

Teorema de existență și unicitate a celui mai mic punct fix pentru funcții Ω -continue pe suport Ω -complet, frecvent citată în informatică, este datorată lui S. C. Kleene (1909-1994) în *Introduction to Metamathematics* (1952).¹

Aplicațiile în informatică au apărut după două decenii. Extinderea la funcții monotone a fost realizată de Hichcock și Park în 1972. Regulile de calculare a punctului fix au apărut în dizertația Phd a lui Morris în 1969, în care s-a arătat ca un *call by value* nu este o asemenea regulă. Aplicarea teoriei mulțimilor ordonate la semantica programelor a fost investigată de D. Scott și C. Strachey în 1971. O sinteză a preocupărilor este datorată lui Z. Manna, *Mathematical Theory of Computation* (1974).

Bazele matematice ale Informaticii: Câteva repere ale studiilor din România

Încercăm să arătăm *în ce constă aceste baze matematice*, mărginindu-ne la câteva exemple privind studiile din țara noastră (ulterior, dacă va fi posibil, vom reveni cu alte exemple de un ordin mai general, într-o a doua parte a acestui articol).

Comunicarea (Moisil, 1961) (Firenze-Bologna) „*Applicazioni dell'algebra alle calcolatrici moderne*” [25] începe afirmând că *direcția matematicii, în prezent, cu precădere algebrică, face posibilă matematizarea diferitelor discipline pentru care caracterul cantitativ al matematicii clasice a constituit un grav impediment.* În aceeași ordine de idei, în monografia dedicată teoriei algebrice a circuitelor de comutație denumite mecanisme automate (Moisil, 1969) [26], [17], autorul spune că,

¹ Kleene a fost studentul lui Alonzo Church ca și Alan Turing (1912-1954). Cu aceștia și cu Emil Post, Kleene este unul dintre fondatorii teoriei recursivității din logica matematică.

în ultima jumătate de secol, (textul este din Martie 1968) „științele matematice au suferit o schimbare esențială, încetând să mai fie o știință cantitativă și devenind știință structurală”. Exemplele date în continuare sunt, în ordinea textului citat [26], *lingvistica matematică, programarea pseudo-boleană, teoria limbajelor de programare și algebra circuitelor de comutație*.

În mai multe lucrări de logică sau relative la algebrele de relații [17], Gr. C. Moisil s-a ocupat de structuri care satisfac condițiile din definiția unui semiinel, cf. (Rudeanu et al., 2004) [31] sau cf. sensului mai restrictiv din (Golan, 1999) [16]. Laticile și apoi semiinelele au câștigat în importanță, în special, pentru aplicațiile în informatică, d.e., în teoria automatelor și limbajelor formale, dar și în semantica programelor, formalizarea proceselor de calcul și a sistemelor concurente sau în analiza programelor, vezi op. cit. pentru numeroase și variate referințe. Amintim că denumirea de *structură* pentru *latici* a fost luată la noi de la O. Ore [28], introdusă de D. Barbilian, preluată de M. Benado, niciodată adoptată de Moisil și azi abandonată (vezi mai jos).²

Limbaje formale, gramatici și automate

În primii ani 1960-1973, după ce a devenit bine înțeleasă legătura limbaje de programare – limbaje formale, teoria limbajelor formale era de regulă expusă fără un recurs substanțial la structuri algebrice suport, e.g., Aho și Ullman (1973). O prezentăm mai degrabă ca o disciplină în curs de formalizare, fără o afiliere la o structură matematică fundamentală. Prin publicarea în 1963 a cursului de *Lingvistică matematică* al acad. Solomon Marcus, la Editura Didactică și Pedagogică, noi eram printre primele țări din lume în care se ținea un curs cu profilul menționat [17]. Fondatorul informaticii matematice/teoretice în țara noastră, ramura limbaje – automate este profesorul Marcus, prin monografia sa de pionerat din 1964 *Gramatici și automate finite* [19], probabil prima în domeniu pe plan mondial, citată ca atare de o autoritate în domeniu, Acad. profesor Arto Salomaa (Finlanda) *Formal Languages* (1973). De atunci și până în prezent, profesorul

Marcus însușește școala noastră în domeniu, școala căreia i s-a consacrat numărul dublu 3-4 din volumul 131/2014 din *Fundamenta Informaticae*.

Comparând diferitele articole științifice ale profesorului Marcus din cuprinzătorul volum *Words and Languages Everywhere* (2007), remarcăm o mare varietate a domeniilor abordate, dar și coerența unei imense opere. Urmându-l pe profesorul Marcus, studiul a fost aprofundat și interesul pentru teoria limbajelor formale s-a dezvoltat grație lucrărilor unor profesori ca *Dan Simovici* (1974), *Virgil Căzănescu* (1980), *Sorin Istrail*, *Acad. Gheorghe Păun*, *Alexandru Mateescu*, *Adrian Atanasiu* sau *Victor Mitrana*. Spre exemplu, s-a arătat că semantica limbajelor independente de context, definită prin atribute, poate fi modelată cu ajutorul algebrelor eterogene/multisortate introduse de G. Birkhoff cu J.D. Lipson, *Heterogeneous algebras* (1970). Mai general, definirea semanticii ca omomorfism de algebre multisortate își are o origine în practica programării cu subrutine interpretative [12], [38].

În context, monografia (Mateescu și Vaida, 1989) [20], cu o prefață a Acad. Solomon Marcus, recenzată semnificativ în *Mathematical Reviews* (91e:68091 – 68Q45, 68N15, 68Q55), se ocupă de condiții de iterativitate de tip Ogden, de structuri algebrice și de ordine în semantică și de gramatici Wijngaarden (W). Se arată că pentru orice mulțime, recursiv enumerabilă, există o gramatică W care o generează (teorema 2.1, pag. 78), se construiesc gramatici W pentru generarea puterilor număr prim, pentru generarea tuturor teoremelor logicii de ordinul întâi s.a.

Structuri algebrice și de ordine, latici, multilatici

Urmând cursurile opționale ale lui Dan Barbilian, în studenție și după 1957, până în 1959 [1], [2], în calitate de unic student, precum și pe cele ale lui Mihail Benado, atenția mi-a fost atrasă de *structurile algebrice parțial ordonate*, începând cu grupurile înzestrate cu o relație de ordine, în raport cu care operația grupală (nu neapărat comutativă) este izotonă. La început, structura de ordine era cea de latică (vezi în continuare) [1].

În anii 1950-1956, în lucrările de care mă ocupam, *ordonarea totală* „pierde din teren” față de *ordonarea parțială*. Exemple de la noi: teza de doctorat a profesorului Marcus *Funcții monotone de două variabile* (1956), articolul lui Mihail Benado despre *multilatici* (multistructuri) (1953) [3]. Exemple din literatură: articolul lui G. Birkhoff și R. S. Pierce *Lattice-ordered rings* [9] (greu accesibil

² B.L. van der Waerden considera că Evariste Galois și Richard Dedekind i-au dat algebrei moderne baza actuală. Nu putem face acum un istoric al acestei imense discipline; vezi însă [39], [13], [10]. Între fondatori ar trebui citat și Ore. Până la apariția ediției din 1940 a monografiei [10], articolul [28] a fost sursa principală pentru teoria laticilor și unul dintre primele modele privind structurile algebrice.

dată fiind revista, cu erori tipografice); vezi și memoriul lui G. Birkhoff *Lattice-ordered Groups* [8].

Într-o *lattice*, operațiile au semnificația următoare: $a \wedge b$ sau *inf* este *cel mai mare minorant* (cmmmi) pentru a și b , deci cel mai mare/ultimul element din mulțimea $L(a,b)$ a minoranților pentru a, b ; dual, $a \vee b$ sau *sup* este *cel mai mic majorant* (cmmmj) pentru a și b , deci cel mai mic/primul element din mulțimea $U(a,b)$ a majoranților pentru a, b . Pentru aplicațiile în informatică, cităm ca simplă ilustrare rezultatul următor: o mulțime F este o mulțime de ștergere, dacă admite o mulțime de descompunere care poate fi completată până la o *lattice* cu prim și ultim element, care este chiar distributivă (A. Mateescu).

Treptat, s-a înțeles că *lattice*le nu erau suficiente pentru modelare, aplicațiile în informatică reclamând structuri algebrice parțial ordonate neconvenționale. Într-o *multilattice*, *inf* este înlocuit de *mulțimea max* $L(a,b)$ a elementelor M *maximale* din $L(a,b)$ și dual, *sup* este înlocuit de *mulțimea min* $U(a,b)$ a elementelor m *minimale* din $U(a,b)$, cazul mulțimilor vide nefiind exclus. O altă extensie a *lattice*lor a fost sugerată de Barbilian, care dă 1954 ca dată a apariției ideilor sale privind *cvasistructurile*. O *nearlattice/cvasistructură* este o *semilattice* inferioară, în care oricare două elemente posedă un *cel mai mic majorant*, dacă admit un *majorant comun* [2].

Extinderea de la *lattice* la *multilattice* este datorată lui Mihail Benado, noțiune introdusă în [3] și dezvoltată în [4,5], până la un întreg domeniu matematic; vezi [6,7] pentru completări și demonstrații. În prezent, teoria lui Benado a *multilattice*lor se bucură de succes, fiind cultivată atât ca o teorie matematică în sine, cât și pentru aplicațiile în informatică. Peste 50 de lucrări o citează. S. Rudeanu și cu mine am făcut o prezentare, pe cât posibil completă, a operei lui Benado, publicată în *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing* [32]. Grupul de profesori de la Malaga, cu foarte multe rezultate, îl citează permanent pe Benado.

Prin intermediul acestor lucrări, am ajuns la *grupuri multilattice-ordonate*; vezi [35,37,21-23].

Rezumăm, în incheiere, că orientarea algebrică din informatică e.g., din teoria abstractă a datelor, este de tipul celei din *algebră*, datorată lui Emmy Noether. Într-adevăr, sunt studiate colecții de date, care nu ni se prezintă ca amorfe, ci vin echipate cu o structură dată de operații. Tipul abstract de date este, astfel, *algebra* inițială dintr-o varietate definită până la un izomorfism.

Bibliografie

- [1] D. Barbilian: [1948] *Curs de Algebră Axiomatică*, Litografia Facultății de Științe, București, 1948.
- [2] D. Barbilian: [1960] *Grupuri cu Operatori (Teoremele de Descompunere ale Algebrei)*, Editura Academiei, București, 617 p.
- [3] M. Benado: [1953] *Asupra unei generalizări a noțiunii de structură*, Bul. Ști. Secți. Mat. Fiz. 5, 41-48.
- [4] M. Benado: [1954] *Asupra teoriei divizibilității*, Bul. Ști. Secți. Mat. Fiz. 6, 263-270.
- [5] M. Benado: [1954] *Asupra unei probleme a lui Garrett Birkhoff*. Bul. Ști. Secți. Mat. Fiz. 6, 703-739.
- [6] M. Benado: [1954] *Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier I*, Czechoslovak Math. J. 4 (79), 105-129.
- [7] M. Benado: [1955] *Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier II* (Theorie des multistruktures), Czechoslovak Math. J. 5 (80.3), 308 - 344.
- [8] G. Birkhoff: [1942] *Lattice-ordered Groups*, Annals of Math., 43, 298-331.
- [9] G. Birkhoff, R. S. Pierce: [1956] *Lattice-ordered rings*, Ann. Acad. Bras. Cienc. 28, 41-69.
- [10] G. Birkhoff: [1973] *Lattice Theory*, Third Edition, Second Printing, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (First Edition, 1940; Second (Revised Edition), 1948) (Amer. Math. Soc., Coll. Publ. vol. XXV).
- [11] Burks, A. W., Goldstine, H. H., Neumann, J. von: [1946] *Preliminary discussion of the logical design of an electronic computing instrument*, I, Princeton N.J., Institute for Advanced Study, 1946.
- [12] I. Cavadia, G. Meiltz, N. Moldovan, D. Vaida, I. Zamfirescu: [1964] *Metode de programare automată. Rutine interpretative*, București, Institutul de Fizică Atomică al Academiei R.P.R., 1964 (preprint).
- [13] L. Corry: [2003] *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, 2d Revised Edition, Basel and Boston, Birkhäuser (Science Networks Vol. 16), 2003.
- [14] A. Froda: [1958] *Algebră superioară. Fundamente: Mulțimi și operații Divizibilitate. Spații liniare. Forme pătratice*, Editura Academiei, București, 454 p. (Cu un Indice alfabetic).
- [15] J. S. Golan, A. Mateescu, D. Vaida: [1996] *Semirings and Parallel Composition of*

- Processes*, Journal of Automata, Languages and Combinatorics 1, 199 - 217.
- [16] J. S. Golan: [1999] *Semirings and their Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston/ London, 1999.
- [17] A. Iorgulescu, S. Marcus, S. Rudeanu, D. Vaida (coordonatori/eds.): [2007] *Grigore C. Moisil și continuatorii săi în domeniul Informaticii Teoretice/Grigore C. Moisil and his followers in the field of Theoretical Computer Science*, Editura Academiei Române, București.
- [18] M. S. Mahoney : [2011] *The structures of computation and the mathematical structure of nature*, The Rutherford Journal.
- [19] S. Marcus: [1964] *Gramatici și automate finite*, Editura Academiei Române, 1964.
- [20] A. Mateescu, D. Vaida: [1989] *Structuri matematice discrete: aplicații*, (cu o prefață de prof. dr. doc. S. Marcus).
- [21] D.B. McAllister: [1965] *On multilattice groups*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 61, 621-638.
- [22] D. B. McAllister: [1966] *On multilattice groups*. II. Proc. Cambridge Philos. Soc. 62, 149-164.
- [23] D.B. McAllister: [1971] *Multilattice groups with a lexico basis*. Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A 71, 53-72.
- [24] Gr. C. Moisil: [1960] *Asupra unor reprezentări ale grafurilor ce intervin în probleme de economia transporturilor*, Com. Academiei, X, 8, 1960, 647-652 (MR0136445 (24#B2479)) (Reviewer: J. Douglas, Jr.).
- [25] Gr. C. Moisil: [1961] *Applicazioni dell'algebra alle calcolatrici moderne*, Atti della 2-a Riunione del Groupement de Mathématiciens d'expression lattine, Firenze, 26-30 settembre 1961- Bologna, 1-3 ottobre 1961, Roma, Edizioni Cremonese, 1963, 259-284.
- [26] Gr. C. Moisil: [1969] *The Algebraic Theory of Switching Circuits*, Pergamon Press, Bucharest, 716 p.
- [27] Gr. C. Moisil: [1970] *Activitatea Centrului de Calcul al Universității din București*, AMC 13-14, 1970, 9-20.
- [28] O. Ore: [1935] *On the foundations of abstract algebra I*, Annals of Mathematics, 36(2), 406-437.
- [29] S. Rudeanu: [1993] *On Lukasiewicz-Moisil algebras of fuzzy sets*, Studia Logica, 52, 1993, 95-111.
- [30] S. Rudeanu: [1997] *Gr. C. Moisil, a contributor to the early development of lattice theory*, Multiple-Valued Logics, 2, 1997, 152-159.
- [31] S. Rudeanu, D. Vaida: [2004] *Semirings in Operations Research and Computer Science: More Algebra*, Fundamenta Informaticae, 61, 61-85.
- [32] S. Rudeanu, D. Vaida : [2013] *Revisiting the works of Mihail Benado*, J. of Mult-Valued Logic&Soft Comput. Vol. 20, no. 3-4, 265-334.
- [33] A. Salomaa: [1973] *Formal languages*, Academic Press, 1973.
- [34] D. Vaida: [1961] *Utilizări ale calculatoarelor electronice de la Institutul de fizică atomică*, Editura Academiei Romane, Bucuresti, 1961.
- [35] D. Vaida: [1964] *Groupes ordonnés dont les éléments admettent une décomposition jordanienne généralisée* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 9, 929-948.
- [36] D. Vaida: [1967] *Programarea calculatoarelor electronice*, Editura Academiei Române, București, 1967, 384 p.
- [37] D. Vaida: [2006] *Note on some order properties related to processes semantics*. I. (English), Fundam. Inform. 73, No. 1-2, 307-319.
- [38] D. Vaida: [2014] *Viitorul din începuturi – gândurile unui matematician privind unitatea culturii*, Biblioteca Revistei Curtea de Argeș, Editura Tiparg, 2014; vezi articolele *Retrospective informatice românești*. Galley, *LeDoyen, Felix* p. 59, *După 40 de ani, despre Gr.C. Moisil și vremea sa* (I) p. 106, *După 40 de ani, despre Gr.C. Moisil și vremea sa* (II) p. 111, *Primii noștri ani de informatică (Universitatea București, 1954-1970)* p. 137, *Informatica la noi – Primele dezvoltări* p. 143.
- [39] B.L. van der Waerden: [1930] *Moderne Algebra*, 2 vols., Berlin, Springer.